Решения заданий по математике олимпиады вузов Росрыболовства среди учащихся 8 классов 2017-18 уч. год
I тур.

Задача 1. 20 октября 2017 года в 7 часов утра из города А в город В выехал автомобиль. Одновременно из города В в город А этой же дорогой выехал мотоцикл. Через 1 час автомобиль оказался точно на полдороги между мотоциклом и городом А. Определите, в котором часу автомобиль может оказаться точно на полдороги между мотоциклом и городом В, если известно, что автомобиль и мотоцикл двигаются с постоянными скоростями?

Решение.

Пусть S км – расстояние между городами, x км/ч – скорость автомобиля, у км/ч – скорость мотоцикла, t ч – время от начала движения до нужного момента. Тогда по условию задачи: $x\cdot 1=\frac{S-y\cdot 1}{2}$; $S - x\cdot t = \frac{y\cdot t}{2}$. Откуда находим, t =2ч.

Ответ. Через 2 часа после начала движения, то есть в 9 часов, утра автомобиль может оказаться точно на полдороги между мотоциклом и городом В.

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{3x^2-|x|}{x+|x|}$.

Решение.

Данная функция определена при $x > 0$, так как при $x \leq 0$ знаменатель дроби равен 0. Поэтому при

$x > 0$ функция задаётся выражением $y = \frac{3x^2-|x|}{x+|x|} = \frac{3x^2-x}{2x} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Нужно построить часть прямой $y=\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, при $x > 0$.

Задача 3. На полке случайно расставлены четыре книги по алгебре и три книги по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

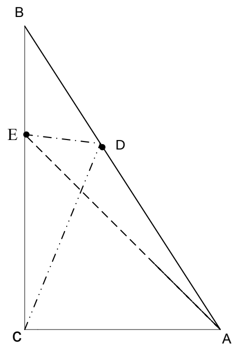
Решение.

Расставить 7 книг на полке можно 7! способами. Расставить вместе 4 книги по алгебре можно 4! способами, расставить вместе 3 книги по геометрии можно 3! способами, поэтому расставить 4 книги по алгебре и 3 книги по геометрии, так чтобы книги по каждому предмету стояли рядом, можно $2\cdot 4!\cdot 3!$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{2\cdot 4!\cdot 3!}{7!} = \frac{2}{35}$.

Ответ. $p=\frac{2}{35}$.

Задача 4. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC выбраны такие точки D и E соответственно, что $\angle EAD = 5°$ и $\angle ECD = 10°$. Найти величину угла $\angle EDC$.

Решение.



$\angle BAC = 50°$,→ $\angle CEA = 45°$,→ EC=CA.
С другой стороны $\angle DCA = 80°$ → $\angle CDA = 50°$,→ $CD = CA$,→ EC= CD.
Треугольник ECD – равнобедренный, → $\angle EDC=85°$.
Ответ. $\angle EDC=85°$.

Задача 5. При каких значениях параметра а неравенство 2х-а$\leq$ 3 является следствием неравенства 3а-х$>$5?
Решение.
Неравенство 2х-а$\leq$ 3 является следствием неравенства 3а-х$>$5, если множество решений второго неравенства содержится в множестве решений первого. Множество решений второго неравенства: х$< 3a - 5$, множество решений первого: х$\leq \frac{a+3}{2}$, → $3a - 5 \leq \frac{a+3}{2}$, → $a \leq \frac{13}{5}$.
Ответ. $a \leq \frac{13}{5}$.

Решения заданий по математике олимпиады вузов Росрыболовства среди учащихся 9 классов 2017-18 уч. год
I тур.

Задача 1. 20 октября 2017 года в 7 часов утра из города А в город В выехал автомобиль. Одновременно из города В в город А этой же дорогой выехал мотоцикл. Через 1 час автомобиль оказался точно на полдороги между мотоциклом и городом А. Определите, в котором часу автомобиль может оказаться точно на полдороги между мотоциклом и городом В, если известно, что автомобиль и мотоцикл двигаются с постоянными скоростями?

Решение.

Пусть S км – расстояние между городами, x км/ч – скорость автомобиля, y км/ч – скорость мотоцикла, t ч – время от начала движения до нужного момента. Тогда по условию задачи: $x\cdot 1=\frac{S-y\cdot 1}{2}$; $S - x\cdot t = \frac{y\cdot t}{2}$. Откуда находим, t =2ч.

Ответ. Через 2 часа после начала движения, то есть в 9 часов, утра автомобиль может оказаться точно на полдороги между мотоциклом и городом В.

Задача 2. Построить график функции $y = \frac{3x^2-|x|}{x+|x|}$.

Решение.

Данная функция определена при $x > 0$, так как при $x \leq 0$ знаменатель дроби равен 0. Поэтому при
$x > 0$ функция задаётся выражением $y = \frac{3x^2-|x|}{x+|x|} = \frac{3x^2-x}{2x} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$. Нужно построить часть прямой $y=\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, при $x > 0$.

Задача 3. На полке случайно расставлены четыре книги по алгебре и три книги по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

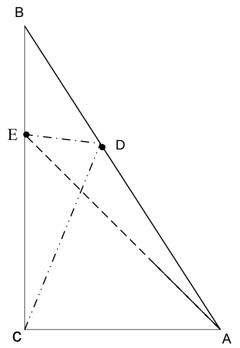
Решение.

Расставить 7 книг на полке можно 7! способами. Расставить вместе 4 книги по алгебре можно 4! способами, расставить вместе 3 книги по геометрии можно 3! способами, поэтому расставить 4 книги по алгебре и 3 книги по геометрии, так чтобы книги по каждому предмету стояли рядом, можно $2\cdot 4!\cdot 3!$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{2\cdot 4!\cdot 3!}{7!} = \frac{2}{35}$.

Ответ. $p=\frac{2}{35}$.

Задача 4. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC выбраны такие точки D и E соответственно, что $\angle EAD = 5°$ и $\angle ECD = 10°$. Найти величину угла $\angle EDC$.

Решение.



$\angle BAC = 50°$,→ $\angle CEA = 45°$,→ EC=CA.
С другой стороны $\angle DCA = 80°$ → $\angle CDA = 50°$,→ $CD = CA$,→ EC= CD.
Треугольник ECD – равнобедренный, → $\angle EDC = 85°$.
Ответ. $\angle EDC = 85°$.

Задача 5. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+2)x^2 - ax - a = 0$ симметричны относительно точки x=1?
Решение.
Если уравнение линейное, a= -2, то оно имеет один корень x=-1, → a$\neq -2$.
Для того чтобы квадратное уравнение имело корни, необходимо чтобы $D \geq 0$, для симметричности корней относительно точки x=1, необходимо чтобы вершина параболы имела абсциссу, равную 1. То есть $\begin{cases} a^2 + 4a(a+2) \geq 0 \\ \frac{a}{2(a+2)} = 1 \end{cases}$.
Решением этой системы является a=-4.
Ответ. a=-4.

Решения заданий по математике олимпиады вузов Росрыболовства среди учащихся 10 классов 2017-18 уч. год
I тур.

Задача 1. Найти натуральные числа n и k, если НОД(n,k)=24 и НОК(n,k)=2496 (НОД – наибольший общий делитель, НОК – наименьшее общее кратное).

Решение.

Так как НОД(n,k)=24, то n=24а, k=24в, где а и в – взаимно простые натуральные числа. Нетрудно видеть, что $\text{НОК}(n,k)=\frac{n\cdot k}{\text{НОД}(n,k)}$, или $2496=\frac{24а\cdot 24в}{24}, \rightarrow а\cdot в=104$.

Значит, возможные значения а=104, в=1; а=13, в=8: а=8, в=13; а=1, в=104. Отсюда находим искомые значения пар (n,k) : (2496, 24); (312, 192); (192, 312); (24, 2496).

Ответ. (2496, 24); (312, 192); (192, 312); (24, 2496).

Задача 2. На полке случайно расставлены четыре книги по алгебре и три книги по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

Решение.

Расставить 7 книг на полке можно 7! способами. Расставить вместе 4 книги по алгебре можно 4! способами, расставить вместе 3 книги по геометрии можно 3! способами, поэтому расставить 4 книги по алгебре и 3 книги по геометрии, так чтобы книги по каждому предмету стояли рядом, можно $2\cdot4!\cdot3!$ способами. Следовательно, искомая вероятность равна $p=\frac{2\cdot4!\cdot3!}{7!}=\frac{2}{35}$.

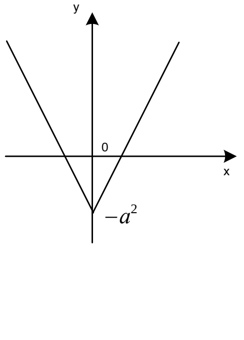
Ответ. $p=\frac{2}{35}$.

Задача 3. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня: $x-\frac{a}{2}=2|2|x|-a^2|$.

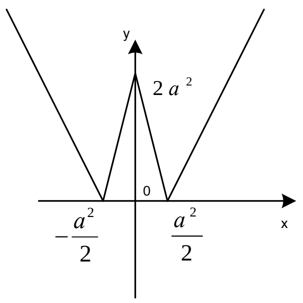
Решение.

Если а=0, то $x=4|x|$, это уравнение имеет один корень x=0, значит, $a\neq 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного уравнения. Левая часть $y=x-\frac{a}{2}$ задаёт прямую, параллельную y=x, проходящую через точку $(0,-\frac{a}{2})$. Для построения графика правой части сначала построим график вспомогательной функции $y=2|x|-a^2$:



а затем график $y=2|2|x|-a^2|$:



Графики имеют три точки пересечения, если прямая проходит через точку $(-\frac{a^2}{2}, 0)$, →a=−1, или е прямая проходит через точку $(0, 2a^2)$, →a=$-\frac{1}{4}$.

Ответ. a=−1, a=$-\frac{1}{4}$.

Задача 4. Решить уравнение $\left|\cos x - \frac{1}{4}\right| = 8\cos^2\frac{x}{2} - 5$.

Решение.

Преобразуем правую часть, так как $2\cos^2\frac{x}{2}$ =1+ $\cos x$, то уравнение примет вид:

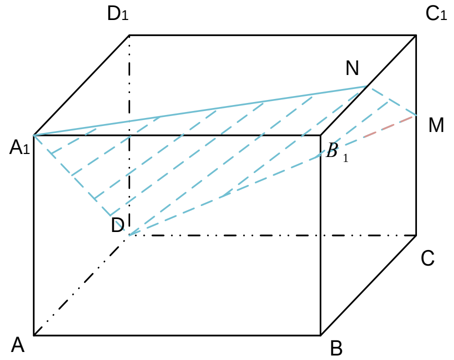
$\left|\cos x - \frac{1}{4}\right|$ =$4\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)$, что выполняется только при $\cos x = \frac{1}{4}$, →x=$\pm arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

Ответ. x=$\pm arccos\frac{1}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z$.

Задача 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: AB=2, AD=1, AA_1=3. Точка M лежит на ребре CC_1 так, что CM: C_1M=5:4. Найти расстояние от точки D_1 до плоскости MA_1D.

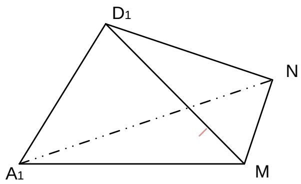
Решение.

Построим сечение. Соединим точки A_1 и D , через точку M проведём прямую, параллельно A_1D, получим точку N∈ B_1C_1. Искомое сечение – трапеция A_1DMN.



Расстояние от точки D_1 до плоскости MA_1D найдём, выразив объём пирамиды D_1A_1MN двумя способами V=$\frac{1}{3}S_1d = \frac{1}{3}S_2h$, где S_1 – площадь треугольника A_1MN, d – искомое расстояние, S_2 – площадь треугольника

D_1NA_1, h – высота пирамиды D_1A_1MN, проведённая из вершины M на плоскость D_1A_1N. Отсюда $d=\frac{S_2 h}{S_1}$.



Находим $S_2=1$, $h = C_1M=\frac{4}{3}$. По теореме Пифагора вычисляем стороны треугольника A_1MN: $A_1N=\frac{\sqrt{349}}{9}$, $MN=\frac{4\sqrt{10}}{9}$, $A_1M=\frac{\sqrt{61}}{3}$. Находим $S_1=\frac{2\sqrt{385}}{27}$, отсюда $d=\frac{18}{\sqrt{385}}$.

Ответ. $d=\frac{18}{\sqrt{385}}$.

Решения заданий по математике олимпиады вузов Росрыболовства среди учащихся 11 классов 2017-18 уч. год
I тур.

Задача 1. Решить неравенство $\frac{(|x|-1)(2^x-2)}{\sqrt{3-x}+2x} \leq 0$.

Решение.

Найдём ОДЗ.$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ \sqrt{3-x}+2x \neq 0. \end{cases} \rightarrow x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;3]$.

Нули функции: $(|x|-1)=0 \rightarrow$ x=1, x=−1. $(2^x-2)=0 \rightarrow$ x=1.

На множестве $x \in (-\infty;\ -1) \cup (-1;3]$ отмечаем нули функции и на каждом полученном промежутке находим её знаки. Функция везде положительна, следовательно, решение неравенства только x=1.

Ответ. x=1.

Задача 2. Найти натуральные числа n и k, если НОД(n,k)=24 и НОК(n,k)=2496 (НОД – наибольший общий делитель, НОК – наименьшее общее кратное).

Решение.

Так как НОД(n,k)=24, то n=24а, k=24в, где а и в – взаимно простые натуральные числа. Нетрудно видеть, что $\text{НОК}(n,k)=\frac{n\cdot k}{\text{НОД}(n,k)}$, или 2496=$\frac{24а\cdot 24в}{24}$,$\rightarrow а \cdot в = 104$.

Значит, возможные значения а=104, в=1; а=13, в=8: а=8, в=13; а=1, в=104.

Отсюда находим искомые значения пар (n,k) : (2496, 24); (312, 192); (192, 312); (24, 2496).

Ответ. (2496, 24); (312, 192); (192, 312); (24, 2496).

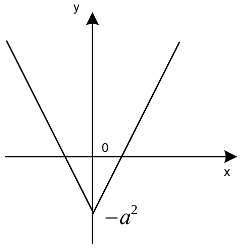
Задача 3. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня: $x-\frac{a}{2}=2|2|x|-a^2|$.

Решение.

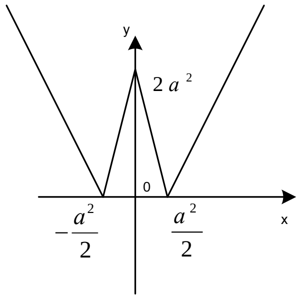
Если а=0, то x=4|x|, это уравнение имеет один корень x=0, значит, а$\neq 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию данного уравнения. Левая часть y= $x-\frac{a}{2}$ задаёт прямую, параллельную y=x, проходящую через точку $(0,-\frac{a}{2})$.

Для построения графика правой части сначала построим график вспомогательной функции y=$2|x|-a^2$:



а затем график y=$2|2|x|-a^2|$:



Графики имеют три точки пересечения, если прямая проходит через точку $(-\frac{a^2}{2}, 0)$, →a=−1, или е прямая проходит через точку $(0, 2a^2)$, →a=$-\frac{1}{4}$.

Ответ. a=−1, a=$-\frac{1}{4}$.

Задача 4. На полке случайно расставлены четыре книги по алгебре и три книги по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

Решение.

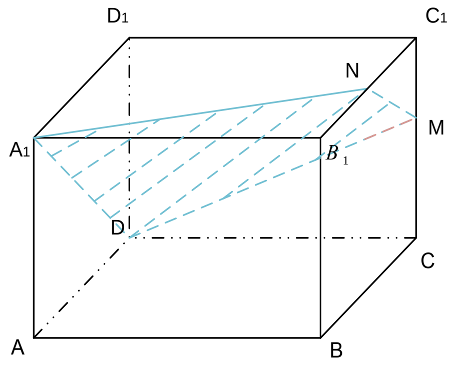
Расставить 7 книг на полке можно 7! способами. Расставить вместе 4 книги по алгебре можно 4! способами, расставить вместе 3 книги по геометрии можно 3! способами, поэтому расставить 4 книги по алгебре и 3 книги по геометрии, так чтобы книги по каждому предмету стояли рядом, можно 2·4!·3! способами. Следовательно, искомая вероятность равна $p = \frac{2\cdot 4!\cdot 3!}{7!} = \frac{2}{35}$.

Ответ. p=$\frac{2}{35}$.

Задача 5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$: AB=2, AD=1, AA_1=3. Точка M лежит на ребре CC_1 так, что CM: C_1M=5:4. Найти расстояние от точки D_1 до плоскости MA_1D.

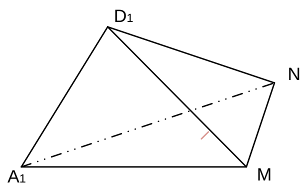
Решение.

Построим сечение. Соединим точки A_1 и D , через точку M проведём прямую, параллельно A_1D, получим точку N∈ B_1C_1. Искомое сечение – трапеция A_1DMN.



Расстояние от точки D_1 до плоскости MA_1D найдём, выразив объём пирамиды D_1A_1MN двумя способами V=$\frac{1}{3}S_1d = \frac{1}{3}S_2h$, где S_1 – площадь треугольника A_1MN, d – искомое расстояние, S_2 – площадь треугольника

D_1NA_1, h – высота пирамиды D_1A_1MN, проведённая из вершины M на



плоскость D_1A_1N. Отсюда $d=\frac{S_2h}{S_1}$.

Находим $S_2=1$, $h = C_1M=\frac{4}{3}$. По теореме Пифагора вычисляем стороны треугольника A_1MN: $A_1N=\frac{\sqrt{349}}{9}$, $MN=\frac{4\sqrt{10}}{9}$, $A_1M=\frac{\sqrt{61}}{3}$. Находим $S_1=\frac{2\sqrt{385}}{27}$, отсюда $d=\frac{18}{\sqrt{385}}$.

Ответ. $d=\frac{18}{\sqrt{385}}$.