Решение заданий по математике
олимпиады вузов Росрыболовства
среди учащихся 8 классов 2016-17 уч. год
2 тур.

Задача 1. Два туриста одновременно вышли на рассвете: один из пункта А в пункт В, другой из пункта В в пункт А. Каждый шёл с постоянной скоростью. Туристы встретились в полдень и, не прекращая движение, продолжили путь. Первый пришёл в пункт В в 16 часов, а второй в пункт А в 21час. В котором часу в тот день был рассвет?

Решение.

Примем расстояние между А и В за 1, скорость первого туриста x, скорость второго туриста y, время туристов в пути до момента встречи t, тогда $\begin{cases} xt + yt = 1 \\ 4x = yt \\ 9y = xt \end{cases}$. Решая эту систему, находим x=$\frac{1}{10}$, y=$\frac{1}{15}$, t=6 ч.

Следовательно, рассвет в тот день был в 6 часов.

Ответ. 6 часов.

Задача 2 На доске написаны числа 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$. Можно ли так расставить знаки «+» и «−» между этими числами, чтобы полученное выражение равнялось 0? Ответ обосновать.

Решение.

Разность двух несократимых дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ с различными знаменателями не может быть равной 0, так как, если b>d, то равенство ad=bc невозможно (a взаимно простое с b; d не делится на b; d и c взаимно простые).

Выражение вида $(1\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{3}\pm\frac{1}{4}\pm\frac{1}{5}\pm\frac{1}{6}\pm\frac{1}{8}\pm\frac{1}{9}\pm\frac{1}{10})\pm\frac{1}{7}$ в силу приведённого выше утверждения ни при каком выборе знака не обращается 0, так как наименьший общий знаменатель дробей в скобках не равен 7.

Ответ. Нет.

Задача 3. Из коробки, в которой первоначально было10 белых и 8 чёрных шаров, потеряли два шара. После этого из неё наугад вынули одновременно 3 шара, которые оказались белыми. Какова вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными?

Решение.

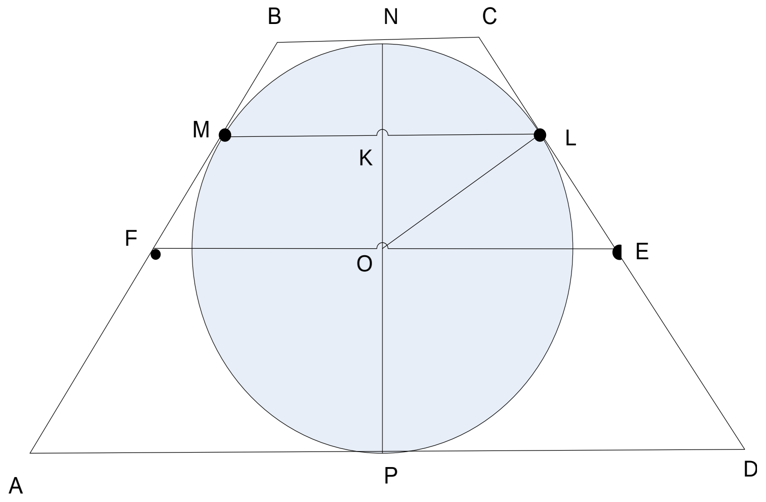
Потерянные шары были из числа «остальных» 7 белых и 8 чёрных шаров.

Отсюда вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными равна p=$\frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{15!}{2!13!}} = \frac{4}{15}$.

Ответ. $\frac{4}{15}$.

Задача 4. Около окружности радиуса r=1, описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найти площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение.



Пусть O – центр окружности, точки касания окружности и трапеции P, M, N, L. Четырёхугольник PMNL является дельтоидом, его диагонали взаимно перпендикулярны и его площадь равна $\frac{1}{2}PN \cdot ML$. PN=2r=2. Найдём ML=2KL. Зная значение площади трапеции, находим NC+PD.

$5=\frac{BC+AD}{2} \cdot 2 \Rightarrow BC+AD=5 \Rightarrow$ средняя линия трапеции

FE= NC+PD=2,5⇒OE=1,25.

Треугольники OKL и OLE подобны, так как они прямоугольные и $\angle KLO = \angle LOE$, $\Rightarrow \frac{KL}{OL} = \frac{OL}{OE} \Rightarrow KL=\frac{OL^2}{OE} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$. Значит, ML=1,6 и площадь четырёхугольника PMNL равна $\frac{1}{2}PN \cdot ML=\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}6=1{,}6$.

Ответ. 1,6.

Задача 5. Определить при каких значениях параметра **a** уравнение

$\frac{|x-2|}{x-2}=(x-a)^2$ имеет только одно решение.

Решение.

ОДЗ: x≠2.

Если x<2, то уравнение принимает вид $-1=(x-a)^2$, это уравнение не имеет решений.

Если x>2, то уравнение принимает вид $1=(x-a)^2$, данное уравнение имеет решения x=a−1или x=a+1.

При выполнении условий $\begin{cases} a-1>2 \\ a+1>2 \end{cases} \Rightarrow a>3$, исходное уравнение имеет два корня.

При выполнении условий $\begin{cases} a-1<2 \\ a+1>2 \end{cases} \Rightarrow 1<a<3$, исходное уравнение имеет один корень x= a+1.

Ответ. При $1<a<3$, исходное уравнение имеет один корень.

Решение заданий по математике
олимпиады вузов Росрыболовства
среди учащихся 9 классов 2016-17 уч. год
2 тур.

Задача 1 Два туриста одновременно вышли на рассвете: один из пункта А в пункт В, другой из пункта В в пункт А. Каждый шёл с постоянной скоростью. Туристы встретились в полдень и, не прекращая движение, продолжили путь. Первый пришёл в пункт В в 16 часов, а второй в пункт А в 21час. В котором часу в тот день был рассвет?

Решение.

Примем расстояние между А и В за 1, скорость первого туриста x, скорость второго туриста y, время туристов в пути до момента встречи t, тогда $\begin{cases} xt + yt = 1 \\ 4x = yt \\ 9y = xt \end{cases}$. Решая эту систему, находим x=$\frac{1}{10}$, y=$\frac{1}{15}$, t=6 ч.

Следовательно, рассвет в тот день был в 6 часов.

Ответ. 6 часов.

Задача 2. На доске написаны числа 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{10}$. Можно ли так расставить знаки «+» и «−» между этими числами, чтобы полученное выражение равнялось 0? Ответ обосновать.

Решение.

Разность двух несократимых дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ с различными знаменателями не может быть равной 0, так как, если b>d, то равенство ad=bc невозможно (a взаимно простое с b; d не делится на b; d и c взаимно простые).

Выражение вида $(1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5} \pm \frac{1}{6} \pm \frac{1}{8} \pm \frac{1}{9} \pm \frac{1}{10}) \pm \frac{1}{7}$ в силу приведённого выше утверждения ни при каком выборе знака не обращается 0, так как наименьший общий знаменатель дробей в скобках не равен 7.

Ответ. Нет.

Задача 3. Из коробки, в которой первоначально было10 белых и 8 чёрных шаров, потеряли два шара. После этого из неё наугад вынули одновременно 3 шара, которые оказались белыми. Какова вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными?

Решение.

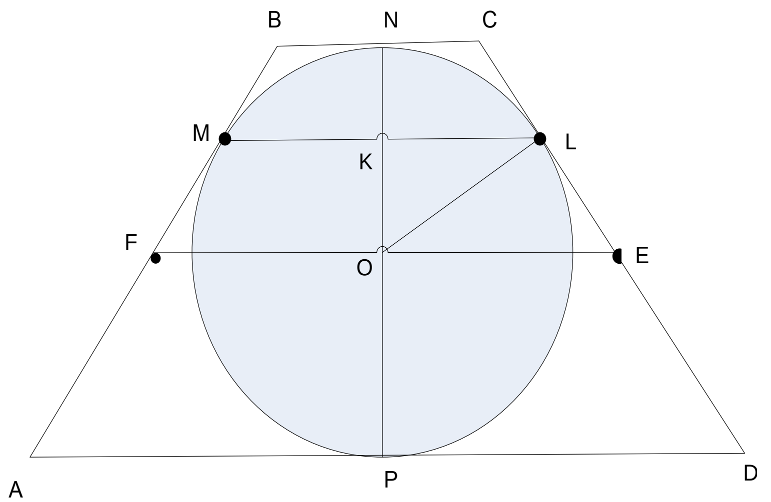
Потерянные шары были из числа «остальных» 7 белых и 8 чёрных шаров.

Отсюда вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными равна p=$\frac{C_8^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{15!}{2!13!}} = \frac{4}{15}$.

Ответ. $\frac{4}{15}$.

Задача 4. Около окружности радиуса r=1, описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найти площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение.



Пусть O – центр окружности, точки касания окружности и трапеции P, M, N, L. Четырёхугольник PMNL является дельтоидом, его диагонали взаимно перпендикулярны и его площадь равна $\frac{1}{2}$PN·ML. PN=2r=2. Найдём ML=2KL. Зная значение площади трапеции, находим NC+PD.

$5=\frac{BC+AD}{2}\cdot 2 \Rightarrow$ BC+AD=5 ⇒ средняя линия трапеции

FE= NC+PD=2,5⇒OE=1,25.

Треугольники OKL и OLE подобны, так как они прямоугольные и $\angle KLO = \angle LOE$, $\Rightarrow \frac{KL}{OL} = \frac{OL}{OE} \Rightarrow KL=\frac{OL^2}{OE} = \frac{1}{1{,}25} = 0{,}8$. Значит, ML=1,6 и площадь четырёхугольника PMNL равна $\frac{1}{2}$PN·ML=$\frac{1}{2}$·2·1,6=1,6.

Ответ. 1,6.

Задача 5. Определить при каких значениях параметра **a** уравнение $\sqrt{x^3+a}+\frac{a+8}{\sqrt{x^3+a}}=3$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^3+a}=y>0$. Так как функция $y=\sqrt{x^3+a}$ является монотонно возрастающей, то каждому конкретному положительному значению y будет соответствовать единственное значение x.

Решаем задачу: найти все значения параметра a, при которых уравнение $y+\frac{a+8}{y}=3$ имеет два различных положительных решения y.

$y^2-3y+a+8=0.$

Это уравнение имеет два различных положительных корня, если

$$\begin{cases} D > 0 \\ y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(a + 8) > 0 \\ 3 > 0 \\ a + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-8;\ -5{,}75).$$

Ответ. $a \in (-8;\ -5{,}75)$.

Решение заданий по математике олимпиады вузов Росрыболовства среди учащихся 10 классов 2016-17 уч. год 2 тур.

Задача 1. Решить уравнение

$$\frac{2+x}{1+3x}=\left(\frac{3a^{\frac{1}{6}}-2в^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{в}}-\frac{3}{a^{\frac{1}{6}}+в^{\frac{1}{6}}}\right)\left(\frac{в\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{aв}+в^{\frac{2}{3}}\right)}{в^{\frac{5}{6}}(a-в)}\right)^{-1}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}.$$

Решение.

Преобразуем левую часть

$$\left(\frac{3a^{\frac{1}{6}}-2в^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{в}}-\frac{3}{a^{\frac{1}{6}}+в^{\frac{1}{6}}}\right)\left(\frac{в\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{aв}+в^{\frac{2}{3}}\right)}{в^{\frac{5}{6}}(a-в)}\right)^{-1}+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{3a^{\frac{1}{6}}-2в^{\frac{1}{6}}}{\left(a^{\frac{1}{6}}-в^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}}+в^{\frac{1}{6}}\right)}-\frac{3}{a^{\frac{1}{6}}+в^{\frac{1}{6}}}\right)\left(\frac{в\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{aв}+в^{\frac{2}{3}}\right)}{в^{\frac{5}{6}}\left(a^{\frac{1}{3}}-в^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{aв}+в^{\frac{2}{3}}\right)}\right)^{-1}+2+\sqrt{3}+$$

$$+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}=\frac{в^{\frac{1}{6}}}{\left(a^{\frac{1}{3}}-в^{\frac{1}{3}}\right)}\frac{\left(a^{\frac{1}{3}}-в^{\frac{1}{3}}\right)}{в^{\frac{1}{6}}}+6=1+6=7.$$

Решаем уравнение $\frac{2+x}{1+3x}=7$ и получаем x$=-0,25$.

Ответ. x$=-0,25$.

Задача 2. Из коробки, в которой первоначально было10 белых и 8 чёрных шаров, потеряли два шара. После этого из неё наугад вынули одновременно 3 шара, которые оказались белыми. Какова вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными?

Решение.

Потерянные шары были из числа «остальных» 7 белых и 8 чёрных шаров. Отсюда вероятность того, что оба потерянных шара были чёрными равна $p=\frac{C_8^2}{C_{15}^2}=\frac{\frac{8!}{2!6!}}{\frac{15!}{2!13!}}=\frac{4}{15}$.

Ответ. $\frac{4}{15}$.

Задача 3. Завод получил заказ на изготовление 1500 изделий типа А и 10000 изделий типа В. Каждый из 160 рабочих завода затрачивает на изготовление одного изделия типа А время, за которое он мог бы изготовить 3 изделия типа В. Каким образом следует разделить рабочих завода на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и рабочие каждой из бригад будут заняты изготовлением изделий только одного типа?

Решение.

Пусть в первой бригаде x рабочих заняты изготовлением изделий типа A, а во второй бригаде $(160-x)$ рабочих заняты изготовлением изделий типа B. Скорость изготовления одного изделия типа A $-$ v деталей в час, тогда скорость изготовления одного изделия типа B $-$ 3v деталей в час. Рабочие первой бригады затратят на изготовление заказа $\frac{1500}{vx}$ часов, а рабочие второй бригады выполнят заказ за $\frac{10000}{3v(160-x)}$. Мы заинтересованы в том, чтобы разность между $\frac{1500}{vx}$ и $\frac{10000}{3v(160-x)}$ была минимальной. Рассмотрим уравнение $\frac{1500}{vx}=\frac{10000}{3v(160-x)} \Rightarrow$ 9(160-x)=20x или 29x=1440, $x=49\frac{19}{29}$.

По смыслу задачи переменная x принимает целые значения. Проверим, выполнимость минимальной разности для целых x, между которыми расположено число $x=49\frac{19}{29}$.

$x=49$: $\left|\frac{1500}{49}-\frac{10000}{333}\right| \approx 0{,}58$.

$x=50$: $\left|\frac{1500}{50}-\frac{10000}{330}\right| \approx 0{,}03$.

Таким образом, завод выполнит заказ за наименьшее время, когда в первой бригаде 50 рабочих заняты изготовлением изделий типа A, а во второй бригаде 110 рабочих заняты изготовлением изделий типа B.

Ответ. 1-я бригада 50 рабочих; 2-я бригада 110 рабочих.

Задача 4.

Определить при каких значениях параметра **a** уравнение

$\sqrt{x^3+a}+\frac{a+8}{\sqrt{x^3+a}}=3$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^3+a}=y>0$. Так как функция $y=\sqrt{x^3+a}$ является монотонно возрастающей, то каждому конкретному положительному значению y будет соответствовать единственное значение x.

Решаем задачу: найти все значения параметра a, при которых уравнение $y+\frac{a+8}{y}=3$ имеет два различных положительных решения y.

$y^2-3y+a+8=0$.

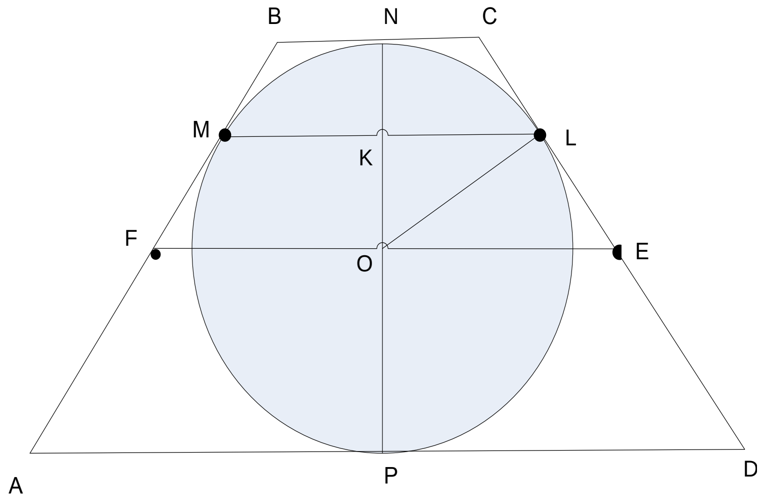
Это уравнение имеет два различных положительных корня, если

$$\begin{cases} D>0 \\ y_1+y_2>0 \\ y_1y_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4(a+8)>0 \\ 3>0 \\ a+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-8;\ -5{,}75).$$

Ответ. $a\in(-8;\ -5{,}75)$.

Задача 5. Около окружности радиуса r=1, описана равнобедренная трапеция, площадь которой равна 5. Найти площадь четырёхугольника, вершинами которого служат точки касания окружности и трапеции.

Решение.



Пусть O – центр окружности, точки касания окружности и трапеции P, M, N, L. Четырёхугольник PMNL является дельтоидом, его диагонали взаимно перпендикулярны и его площадь равна $\frac{1}{2}$PN·ML. PN=2r=2. Найдём ML=2KL. Зная значение площади трапеции, находим NC+PD.

$5=\frac{BC+AD}{2}\cdot 2 \Rightarrow$ BC+AD=5 $\Rightarrow$ средняя линия трапеции

FE= NC+PD=2,5⇒OE=1,25.

Треугольники OKL и OLE подобны, так как они прямоугольные и $\angle KLO = \angle LOE$, $\Rightarrow \frac{KL}{OL} = \frac{OL}{OE} \Rightarrow$ KL=$\frac{OL^2}{OE} = \frac{1}{1,25} = 0,8$. Значит, ML=1,6 и площадь четырёхугольника PMNL равна $\frac{1}{2}$PN·ML=$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1,6$=1,6.

Ответ. 1,6.

Решение заданий по математике
олимпиады вузов Росрыболовства
среди учащихся 11 классов 2016-17 уч. год
2 тур.

Задача 1. Решить уравнение$\log_{\sin x\cos x}\sin x\cdot\log_{\sin x\cos x}\cos x=\frac{1}{4}$.

Решение.

ОДЗ:$\begin{cases}\sin x>0\\ \cos x>0\end{cases}\Rightarrow$ решение принадлежит первой четверти.

Преобразуем уравнение. $\frac{1}{\log_{\sin x}\sin x\cos x}\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x\cos x}=\frac{1}{4}$ или $\frac{1}{1+\log_{\sin x}\cos x}\frac{1}{1+\log_{\cos x}\sin x}=\frac{1}{4}$.

Введём новую переменную t=$\log_{\sin x}\cos x\Rightarrow\frac{1}{1+t}\frac{1}{1+\frac{1}{t}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{t}{(t+1)^2}=\frac{1}{4}$ или $(t-1)^2$=0$\Rightarrow t=1$.

$\log_{\sin x}\cos x$=1$\Rightarrow$ $\cos x$=$\sin x$$\Rightarrow$tgx=1$\Rightarrow$ с учётом ОДЗ x=$\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

Ответ. x=$\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

Задача 2 Завод получил заказ на изготовление 1500 изделий типа А и 10000 изделий типа В. Каждый из 160 рабочих завода затрачивает на изготовление одного изделия типа А время, за которое он мог бы изготовить 3 изделия типа В. Каким образом следует разделить рабочих завода на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и рабочие каждой из бригад будут заняты изготовлением изделий только одного типа?

Решение.

Пусть в первой бригаде x рабочих заняты изготовлением изделий типа А, а во второй бригаде (160 − x) рабочих заняты изготовлением изделий типа В. Скорость изготовления одного изделия типа А − v деталей в час, тогда скорость изготовления одного изделия типа В − 3v деталей в час. Рабочие первой бригады затратят на изготовление заказа $\frac{1500}{vx}$ часов, а рабочие второй бригады выполнят заказ за $\frac{10000}{3v(160-x)}$. Мы заинтересованы в том, чтобы разность между $\frac{1500}{vx}$ и $\frac{10000}{3v(160-x)}$ была минимальной. Рассмотрим уравнение

$\frac{1500}{vx}$=$\frac{10000}{3v(160-x)}$ ⇒ 9(160-x)=20x или 29x=1440, x=$49\frac{19}{29}$.

По смыслу задачи переменная x принимает целые значения. Проверим, выполнимость минимальной разности для целых x, между которыми расположено число x=$49\frac{19}{29}$.

x=49: $\left|\frac{1500}{49}-\frac{10000}{333}\right|$ ≈0,58.

x=50: $\left|\frac{1500}{50}-\frac{10000}{330}\right|\approx 0{,}03$.

Таким образом, завод выполнит заказ за наименьшее время, когда в первой бригаде 50 рабочих заняты изготовлением изделий типа А, а во второй бригаде 110 рабочих заняты изготовлением изделий типа В.

Ответ. 1-я бригада 50 рабочих; 2-я бригада 110 рабочих.

Задача 3. Определить при каких значениях параметра **а** уравнение

$\sqrt{x^3+a}+\frac{a+8}{\sqrt{x^3+a}}=3$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Обозначим $\sqrt{x^3+a}=y>0$. Так как функция $y=\sqrt{x^3+a}$ является монотонно возрастающей, то каждому конкретному положительному значению y будет соответствовать единственное значение x.

Решаем задачу: найти все значения параметра a, при которых уравнение $y+\frac{a+8}{y}=3$ имеет два различных положительных решения y.

$y^2-3y+a+8=0$.

Это уравнение имеет два различных положительных корня, если

$$\begin{cases} D>0 \\ y_1+y_2>0 \\ y_1y_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9-4(a+8)>0 \\ 3>0 \\ a+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-8;\ -5{,}75).$$

Ответ. $a\in(-8;\ -5{,}75)$.

Задача 4. Решить неравенство

$$\log_2\frac{3}{x}+\log_2(x^2-7x+11)\le\log_2\left(x^2-7x+\frac{3}{x}+10\right).$$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{3}{x}>0 \\ x^2-7x+11>0 \\ \frac{3}{x}(x^2-7x+11)\le x^2-7x+\frac{3}{x}+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\in\left(-\infty;\ \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \\ \left(\frac{3}{x}-1\right)(x^2-7x+10)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

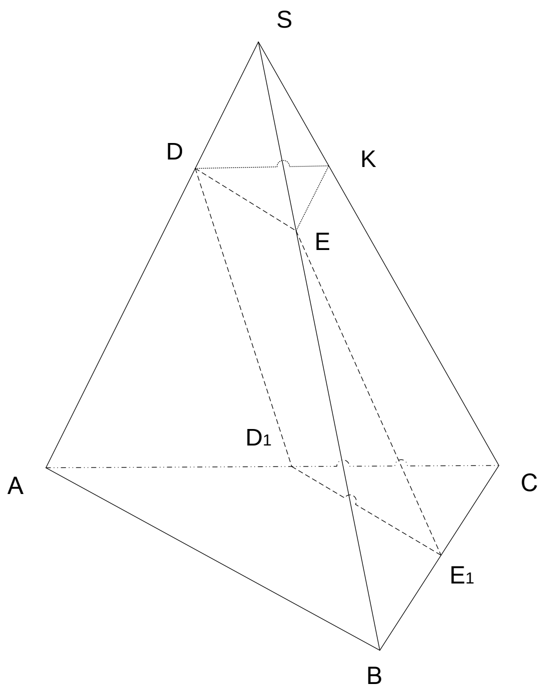
$$\begin{cases} x\in(0;\ +\infty) \\ x\in\left(-\infty;\ \frac{7-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{7+\sqrt{5}}{2};+\infty\right). \\ x\in(-\infty;0)\cup[2;3]\cup[5;+\infty) \end{cases}$$

Решение системы $x\in[2;\frac{7-\sqrt{5}}{2})\cup[5;\ +\infty)$.

Ответ. $x\in[2;\frac{7-\sqrt{5}}{2})\cup[5;\ +\infty)$.

Задача 5. В треугольной пирамиде SABC, точки D и E лежат соответственно на рёбрах SA и SB, причём SD:DA=SE:EB=1:2. Через точки D и E проведена плоскость, параллельная ребру SC. В каком отношении эта плоскость делит объём пирамиды.

Решение.



Через точку D проводим $DD_1 \parallel SC$, через E проводим $EE_1 \parallel SC$. Искомое сечение DEE_1D_1.

Пусть объем пирамиды SABC равен $V = \frac{1}{3} s_{\text{осн}} h$.

Через точки D и E проведём плоскость DEK, параллельно основанию ABC.

Объём V_1 отсечённой фигуры SDD_1E_1EC выразим через сумму объёмов пирамиды SDEK и призмы $DEKD_1E_1C$.

Объём пирамиды SDEK равен $\frac{1}{27}$ V, так как отсечённая пирамида подобна исходной с коэффициентом подобия $\frac{1}{3}$. Объём призмы $DEKD_1E_1C$ равен $\frac{1}{9} s_{\text{осн}} \frac{2}{3} h = \frac{2}{9}$ V. Значит, $V_1 = \frac{1}{27} V + \frac{2}{9} V = \frac{7}{27} V$. Объём оставшейся части $V_2 = \frac{20}{27} V$.

$\frac{V_2}{V_1} = \frac{20}{7}$.

Ответ. 20:7.